Jochen Weber

Basis und Dimension eines Vektorraumes

Definition:

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. der Ebene $\mathbb{R}^2$ erzeugen lässt, bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

Folgerung:

Drei bzw. zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.
Jeder weitere Vektor lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Die Anzahl der Vektoren einer Basis heißt Dimension.

Folgerung:

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional.

Aufgaben:

1 Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2 Bestimmen Sie den Wert von $k\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}k\\1\\0\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

3 Bestimmen Sie den Wert von $k\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

4 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung 0 sind die Punkte A(1/0/-2), B(-1/2/2) und C_k(k/-k/-2-k) mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben. (Abitur 2010 BII)
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ und $\overrightarrow{0C_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

5.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c_p} = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$ (Abitur 2017 BI)

5.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, für den die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\overrightarrow{c_p}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

5.2 Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\overrightarrow{c_{-2}}$ (d.h. für p = -2) aus.

Lösungen:

1

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

(II) $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

(III) $3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$

3

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

4

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ -2 & 2 & -2-k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

5.1

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} p+4 \\ -2p \\ 3-4p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 2 & 0 & -2p & 0 \\ -3 & 2 & 3-4p & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 14 & 15-p & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8p-8 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $p \neq 1$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

5.2

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{III})\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-5\\2&0&-4&2\\-3&2&11&-3\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\(\mathrm{III})\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-5\\0&-8&-8&12\\0&14&17&-18\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&-5\\0&-8&-8&12\\0&0&-24&-24\end{array}\right)$$

$(\mathrm{III})\Rightarrow -24\lambda_3=-24\ \Rightarrow\lambda_3=1$

$(\mathrm{II})\Rightarrow -8\lambda_2-8\cdot1=12\ \Rightarrow\lambda_2=-2{,}5$

$(\mathrm{I})\Rightarrow\lambda_1-4\cdot2{,}5+2\cdot1=-5\ \Rightarrow\lambda_1=3$

$\Rightarrow\vec{d}=3\cdot\vec{a}-2{,}5\cdot\vec{b}+\overrightarrow{c_{-2}}$